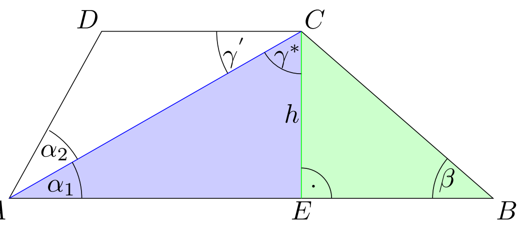
Aufgabe W 1:

a)



Gegeben ist das Trapez $ABCD$

Es gilt:

$\overline{AB} = 8,0\,\text{cm}$
$\overline{BC} = 4,2\,\text{cm}$
$\beta = 41,0\,°$
$\overline{AD} = \overline{CD}$

Berechnen Sie den Winkel α.

Plan: Im $\triangle EBC$ werden die Höhe $h = \overline{EC}$ und die Stecke $\overline{EB}$ bestimmt.

Aus $\overline{AB}$ und $\overline{EB}$ gewinnt man $\overline{AE}$.

Im $\triangle AEC$ bestimmt man den $\sphericalangle(ACE) = \gamma^*$ und findet $\sphericalangle(EAC) = \alpha_1$.

α_2 findet man über den gleich weiten $\sphericalangle(ACD) = 90° - \gamma^*$.

$\triangle EBC$ Berechnung von $h = \overline{EC}$: $\sin\beta = \frac{h}{\overline{BC}} \Rightarrow h = \sin\beta \cdot \overline{BC} = \sin 41° \cdot 4,2\,\text{cm} \approx 2,76\,\text{cm}$

$\triangle EBC$ Berechnung von $\overline{EB}$: $\cos\beta = \frac{\overline{EB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{EB} = \cos\beta \cdot \overline{BC} = \cos 41° \cdot 4,2\,\text{cm} \approx 3,17\,\text{cm}$

Berechnung von $\overline{AE}$: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 8,0\,\text{cm} - 3,17\,\text{cm} = 4,83\,\text{cm}$

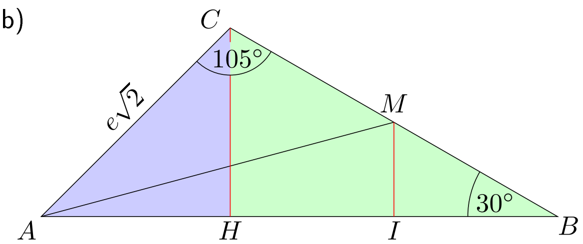
$\triangle AEC$ Berechnung von γ^* : $\tan\gamma^* = \frac{\overline{AE}}{h} = \frac{4,83}{2,76} \Rightarrow \gamma^* = 60,30°$

Berechnung von α_2 : $\alpha_2 = \gamma' = 90° - 60,30° = 29,70°$

$\triangle AEC$ Berechnung von α_1 : α_1 ist Wechselwinkel von $\gamma' \Rightarrow \alpha_1 = 29,70°$

Der Winkel α hat die Weite $\alpha_1 + \alpha_2 = 59,4°$.

b)



Gegeben ist das Dreieck ABC

Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{BC}$

Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass dür den Flächeninhalt des Dreiecks ABM gilt:

$$A_{\triangle ABM} = \frac{e^2}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Plan: Das $\triangle ABM$ hat dieselbe Grundseite $\overline{AB}$ wie das $\triangle ABC$, aber die halbe Höhe.

Folglich ist $A_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle ABC}$. Es genügt also, $A_{\triangle ABC}$ zu berechnen.

$\triangle ABC$ ist zusammengesetzt aud dem gleichschenklig-rechtwinkligen $\triangle AHC$ und dem (halben gleichseitigen) $\triangle HBM$.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{\overline{IM}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{IM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HC}$

Da die Grundseiten der Dreiecke $A_{\triangle ABM}$ und $A_{\triangle ABC}$ gleich sind, folgt dann: $A_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle ABC}$.

Berechnung von $A_{\triangle AHC}$:

$\triangle AHC$ ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $e\sqrt{2}$. Die Katheten $\overline{AH}$ und $\overline{HC}$ haben dann die Länge $\frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = e$.

Es ist: $A_{\triangle AHC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{HC} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot e = \frac{e^2}{2}$

Berechnung von $A_{\triangle HBC}$:

$\triangle HBC$ ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der halben Grundseite $\overline{HC} = e$.

$\overline{HB}$ ist in diesem (gleichseitigen) Dreieck die Höhe mit der Länge $\overline{HB} = e\sqrt{3}$

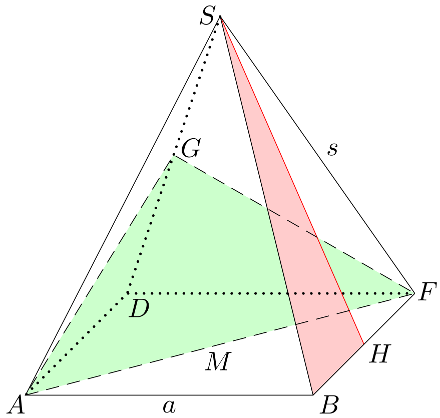
Es ist: $A_{\triangle HBC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HC} \cdot \overline{HB} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot e\sqrt{3} = \frac{e^2}{2}\sqrt{3}$

Die Fläche des $\triangle ABC$ ist also $\triangle ABC = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\sqrt{3} = \frac{e^2}{2} \cdot (1 + \sqrt{3})$

Wegen $A_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle ABC}$ ist $A_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) = \frac{e^2}{4} \cdot (1 + \sqrt{3})$

Aufgabe W 2:

a)



Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt:

$a = 7,6\,\text{cm}$
$s = 10,2\,\text{cm}$

Der Punkt G halbiert die Seitenkante s.

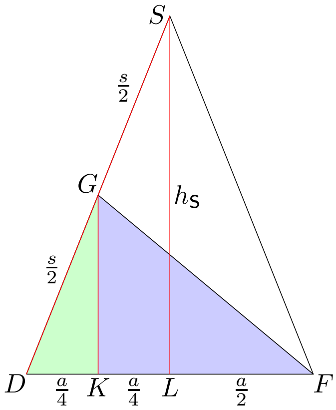
Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks AFG.

Plan: $\overline{AE}$ ist Diagonale eines Quadtrats mit der Seitenlänge a.

Im $\triangle MHS$ bestimmt man die Seitenhöhe h_S.

Die rote Strahlensatzfigur (unteres Bild) zeigt:
$\overline{AK} = \frac{a}{4}$, $\overline{AK} = \frac{s}{2}$ und $\overline{KG} = \frac{1}{2} \cdot h_S$.

Im $\triangle KBG$ schließlich wird mit $\overline{KG}$ und $\overline{LG} = \frac{3}{4}a$ die Strecke $\overline{BG}$ berechnet werden. Es folgt $u = \overline{AF} + 2 \cdot \overline{BG}$.



$\triangle ABF$ Berechnung von $\overline{AF}$: $\overline{AF} = a \cdot \sqrt{2} = 7,6 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm} \approx 10,75\,\text{cm}$

$\triangle BHS$ Berechnung von $\overline{HS}$:

$$\overline{HS} = \sqrt{s^2 - \overline{HB}} = \sqrt{s^2 - (\tfrac{1}{2}a)^2} = \sqrt{10,2^2 - \tfrac{1}{2}7,6}\,\text{cm} \approx 9,47\,\text{cm} = h_S$$

In der Strahlensatzfigur (unten, rot) findet man:

$\overline{DG} : \overline{GS} = 1 : 1 = \overline{DK} : \overline{KL}$. Weil $\overline{SL}$ die Strecke $\overline{DF}$ halbiert, ist $\overline{DK} = \frac{a}{4}$ und $\overline{KF} = \frac{3}{4}a = 5,7\,\text{cm}$.

Außerdem ist:

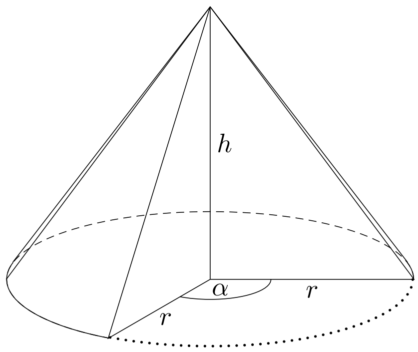
$$\overline{DG} : \overline{DS} = 1 : 2 = \overline{KG} : \overline{LS} \Rightarrow \overline{KG} = \tfrac{1}{2}\overline{LS} = \tfrac{1}{2}h_S = 4,73\,\text{cm}$$

$\triangle KFG$ Berechnung von $\overline{FG}$:

$$\overline{FG} = \sqrt{\overline{KF}^2 + \overline{KG}^2} = \sqrt{5,70^2 + 4,73^2}\,\text{cm} \approx 7,41\,\text{cm}$$

Berechnung des Umfangs u im $\triangle AFG$: $u = \overline{AF} + 2 \cdot \overline{FG} = 10,75\,\text{cm} + 2 \cdot 7,41\,\text{cm} = 25,6\,\text{cm}$

b)



Aus einem massiven Kegel wurde ein Teil ausgeschnitten. Es gilt:

$h = 4e$
$r = 3e$
$\alpha = 120°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass die Oberfläche des neu entstandenen Körpers um

$$4e^2(2\pi - 3)$$

kleiner ist.

Plan: Es wurden von der Kegeloberfläche ein Drittel des Mantels und der Grundfläche entfernt.
Dazugekommen sind zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten r und h.

Berechnung der Länge s der Seitenlinie des Kegels:

$s = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{(3e)^2 + (4e)^2} = \sqrt{9e^2 + 16e^2} = \sqrt{25e^2} = 5e$

Berechnung der entfernten Mantelfläche $A_{\text{M-Drittel}}$: $A_{\text{M-Drittel}} = \frac{1}{3}\pi r s = \frac{1}{3}\pi \cdot 3e \cdot 5e = 5\pi e^2$

Berechnung der entfernten Grundfläche $A_{\text{G-Drittel}}$: $A_{\text{G-Drittel}} = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi 9e^2 = 3\pi e^2$

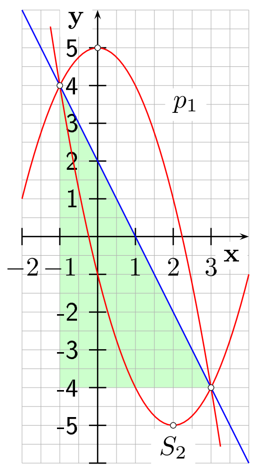
Berechnung der (Dreiecks-) Schnittflächen A_{Dreieck}. $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}r \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3e \cdot 4e = 6e^2$

Berechnung der Differenzfläche A_{Diff}:

$$A_{\text{Diff}} = A_{\text{M-Drittel}} + A_{\text{G-Drittel}} - 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} = 5\pi e^2 + 3\pi e^2 - 2 \cdot 6e^2 = 8\pi e^2 - 12e^2 = 4e^2(2\pi - 3)$$

Aufgabe W 3:

a) Eine Parabel p_1 hat die Gleichung $y = -x^2 + 5$.
Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitel $S_2(2|-5)$.
Durch die gemeinsamen Punkte der beiden Parabeln verläuft eine Gerade.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Geraden rechnerisch.
Berechnen Sie die Winkel, unter denen die Gerade die x-Achse schneidet.



Bestimmung der Parabelgleichung p_2:
$p_2 : y = (x-2)^2 - 5 = x2 - 4x - 1$
Berechnung der Schnittpunkte der Parabeln durch Gleichsetzung:

$$
\begin{aligned}
p_2 &= p_1 \\
x^2 - 4x - 1 &= -x^2 + 5 && |+x^2-5 \\
2x^2 - 4x - 6 &= 0 && |:2 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1^2+3} \\
x_{1,2} &= 1 \pm 2 \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= 3 \\
y_1 &= -(-1)^2 + 5 \\
y_1 &= 4 \\
y_2 &= -3^2 + 5 \\
y_2 &= -4
\end{aligned}
$$

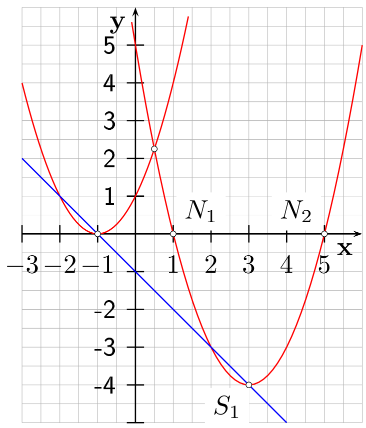
Bestimmung der Geradengleichung:
$m_g = \frac{y_1-y_2}{x_2-x_1} = \frac{4-(-4)}{-1-3} = \frac{8}{-4} = -2$

Punktprobe mit $(-1|4)$:

$$
\begin{aligned}
4 &= -2 \cdot (-1) + c \\
4 &= 2 + c && |-2 \\
2 &= c
\end{aligned}
$$

Die Gerade hat die Gleichung $y = -2x + 2$.
Berechnung des Winkels, unter denen die Gerade die x-Achse schneidet:
$\tan\alpha = m = -2 \Rightarrow \alpha = -63,4°$

b) Von einer nach oben geöffneten Normalparabel p_1 sind die Schnittpunkte mit der x-Achse bekannt.
$N_1(1|0)$ und $N_2(5|0)$
Durch den Scheitelpunkt der Parabel p_1 verläuft die Gerade g mit der Steigung $m = -1$.
Auf dieser Geraden liegt der Scheitelpunkt einer zweiten nach oben geöffneten Normalparabel, die mit der x-Achse nur einen gemeinsamen Punkt hat.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Parabeln.



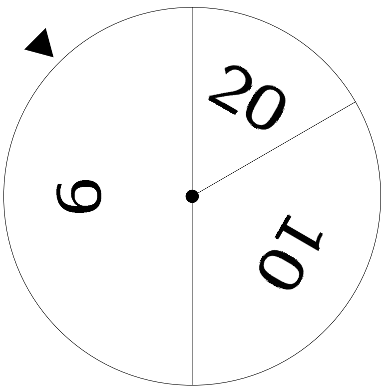
Bestimmung der Parabelgleichung p_1:
Der Scheitel der Normalparabel liegt in $S_1(3|-4)$.
$p_2 : y = (x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5$
Bestimmung der Geradengleichung von g:
Die Gerade hat die Steigung $m = -1$. Geht man vom Scheitel der Parabel p_1 3 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach oben, so findet man $c = -1$
$g : y = -x - 1$
Geht man vom Schnittpunkt der Geraden g mit der y-Achse 1 Einheit nach links und 1 Einheit nach oben, so findet man den Schnittpunkt mit der x-Achse in $x = -1$. Dies ist der Scheitelpunkt S_2 der zweiten Normalparabel $p_2 : y = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
Bestimmung des Schnittpunkts der Parabeln durch Gleichsetzen:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_2 \\
x^2 - 6x + 5 &= x^2 + 2x + 1 && |-2x^2 - 2x - 5 \\
-8x &= -4 && |:(-8) \\
x &= 0,5 \\
y &= 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 + 1 \\
y &= 2,25
\end{aligned}
$$

Die Parabeln schneiden sich in $P(0,5|2,25)$.

Aufgabe W 4:

a) Ein Glücksrad mit den Mittelpunktswinkeln $60°$, $120°$ und $180°$ ist mit den Zahlen 20, 10 und 6 beschriftet. Es wird zweimal gedreht.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erhaltenen Zahlen genau 30 ergibt?

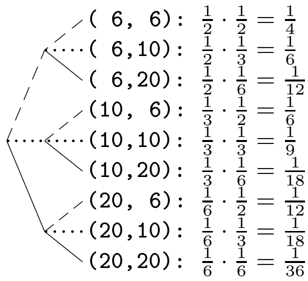
$p_{\text{30}} = p_{\text{10,20}} + p_{\text{20,10}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 11{,}1\,\%$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe größer als 12 ist?

$p_{\text{größer als 12}} = 1 - p_{\text{6,6}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}75 = 75{,}0\,\%$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe kleiner als 30?

$p_{\text{kleiner als 30}} = p_{\text{6,6}} + p_{\text{6,10}} + p_{\text{10, 6}} + p_{\text{6,20}} + p_{\text{20, 6}} + p_{\text{10,10}}$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}$
$= \frac{9}{36}+\frac{6}{36}+\frac{6}{36}+\frac{3}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{9} = \frac{31}{36} = 86{,}1\,\%$



b) Das regelmäßige Sechseck hat die Seitenlänge $\frac{3}{2}e$.

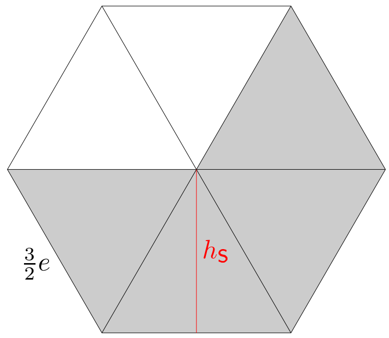
Die vier grau eingefärbten Dreiecke bilden die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide.

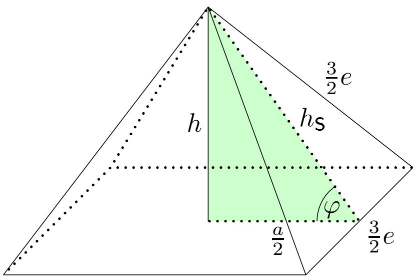
Berechnen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von e.

Der Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Pyramide wird mit φ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tan\varphi = \sqrt{2}$$





Berechnung der Seitenhöhe h_S im gleichseitigen Dreieck:

$h_S = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{\frac{3}{2}e}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4}e\sqrt{3}$

Berechnung von $\frac{a}{2}$: $\quad \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}e = \frac{3}{4}e$

Berechnung der Pyramidenhöhe h:

$h = \sqrt{h_S^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{(\frac{3}{4}e\sqrt{3})^2 - (\frac{3}{4}e)^2} = \sqrt{(\frac{27}{16}e^2 - \frac{9}{16}e^2}$

$h = \sqrt{(\frac{18}{16}e^2} = \frac{3}{4}e\sqrt{2}$

Berechnung des Volumens V der Pyramide:

$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}e)^2 \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{4}e^3\sqrt{2} = \frac{9}{16}e^3\sqrt{2}$

Berechnung des Neigungswinkels φ zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche:

$$\tan\varphi = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3}{4}e\sqrt{2}}{\frac{3}{4}e} = \frac{3e\sqrt{2}\cdot 4}{3e \cdot 4} = \sqrt{2}$$