



Mathematik I

Name: _____ Vorname: _____

Klasse: _____ Platzziffer: _____ Punkte: _____

Aufgabe A 1

Haupttermin

A 1.0 In einem Handbuch zur Wetterkunde finden Sie im Kapitel Erdatmosphäre die nebenstehende Tabelle.

Höhe über dem Meeresspiegel	Luftdruck
0 m	1000 hPa
5500 m	500 hPa
11000 m	250 hPa
16500 m	125 hPa
22000 m	63 hPa

Der Zusammenhang zwischen der Höhe x m über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck y hPa lässt sich demzufolge näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschreiben ($\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$; $y_0 \in \mathbb{R}^+$; $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).

A 1.1 Ermitteln Sie die zugehörige Funktionsgleichung. (Runden Sie den Wert für k auf sechs Stellen nach dem Komma.)

2 P

A 1.2 Berechnen Sie, von welcher Höhe über dem Meeresspiegel an der Luftdruck weniger als 777 hPa beträgt.

1 P

A 1.3 Kreuzen Sie an, um wie viel Prozent der Luftdruck alle 11 000 m abnimmt.

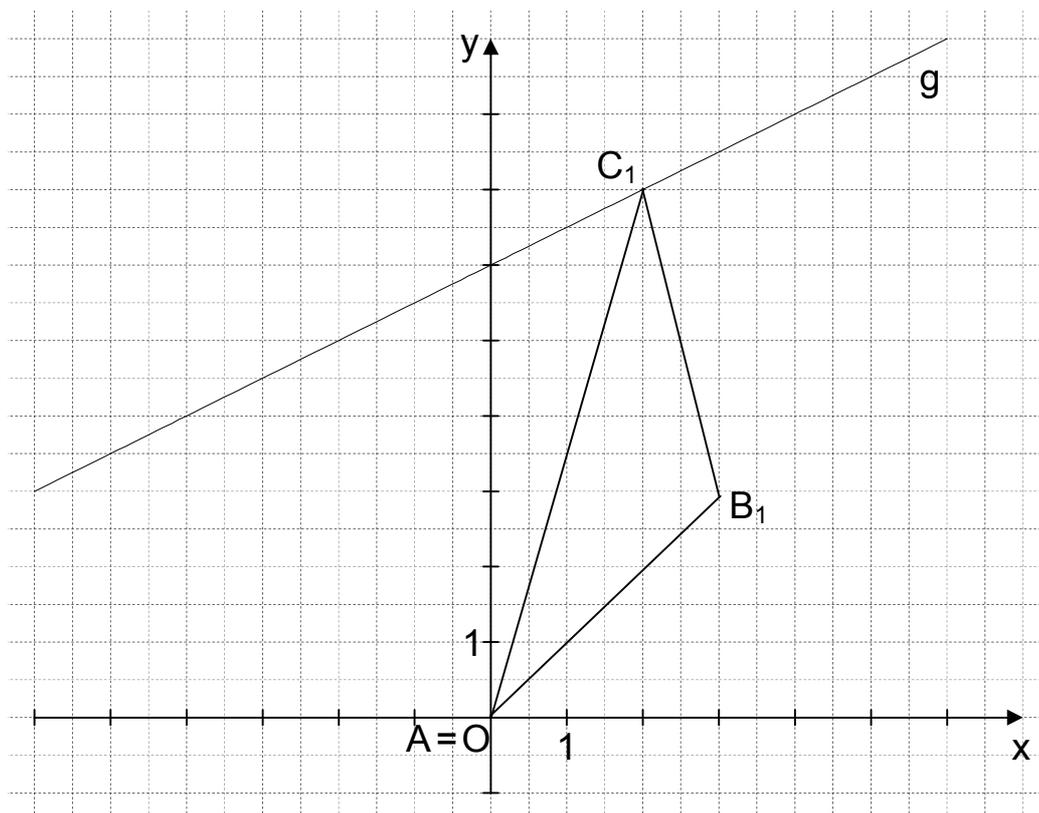
1 P

25% 50% 75% 250% 500% 750%

A 1.4 Begründen Sie ausgehend von der Tabelle zu 1.0, welcher Luftdruck 5 500 m unterhalb des Meeresspiegels im „tiefsten (zugänglichen) Bohrloch der Welt“ bei Windischeschenbach zu erwarten wäre.

1 P

A 2.0 Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken AB_nC_n , wobei die Punkte $C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6 \right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 6$ liegen ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Die Basiswinkel B_nAC_n und AC_nB_n der Dreiecke AB_nC_n haben das Maß 30° .



A 2.1 In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck AB_1C_1 für $x = 2$ eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck AB_2C_2 für $x = -3$ ein.

1 P

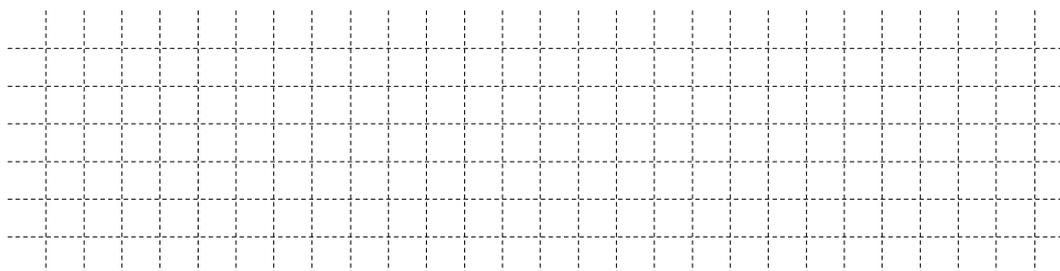
A 2.2 Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken $[AB_n]$ und $[AC_n]$ gilt:

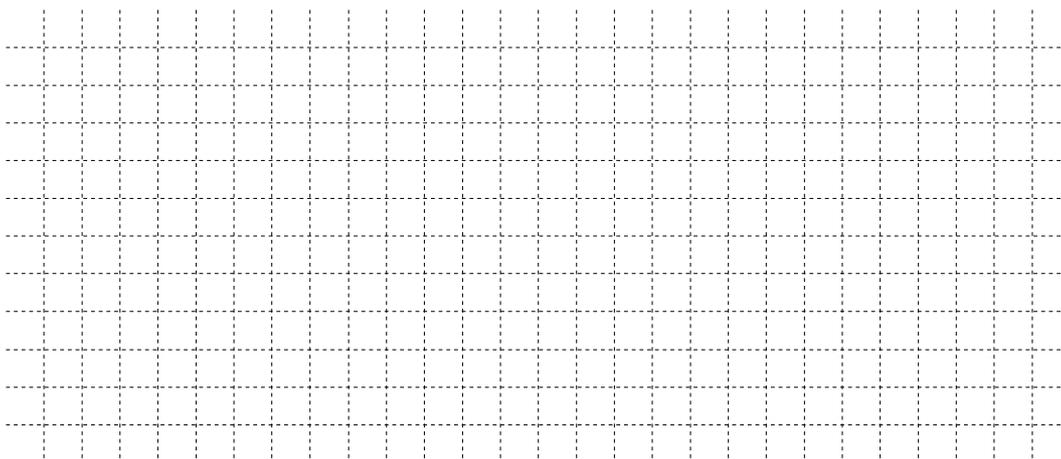
$$\overline{AB_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}.$$

Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:

$$A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) \text{ FE}.$$

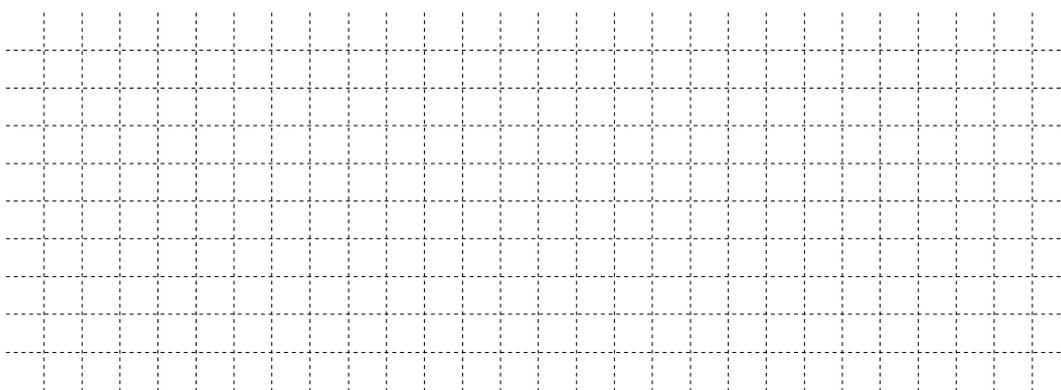
3 P





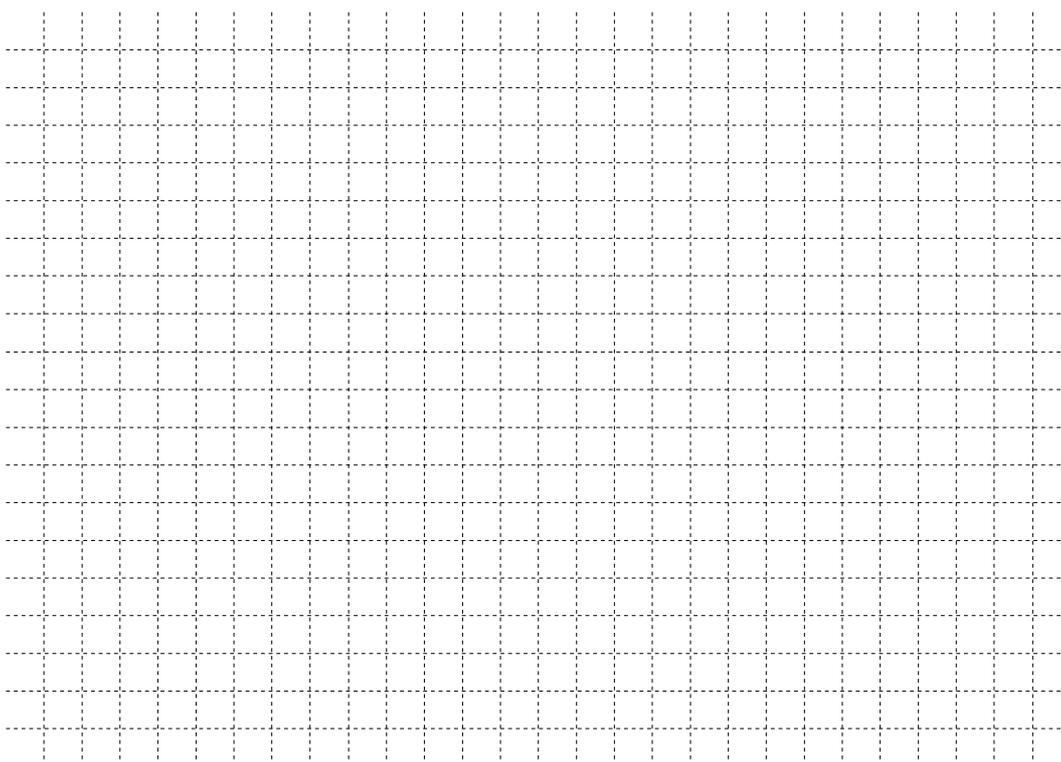
A 2.3 Unter den Dreiecken AB_nC_n hat das Dreieck AB_0C_0 den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_0 .

2 P



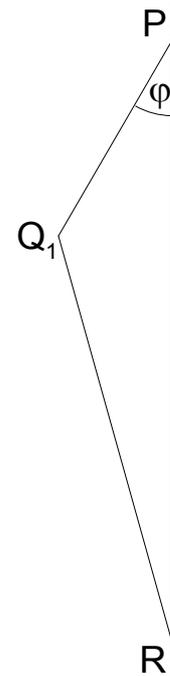
A 2.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

3 P



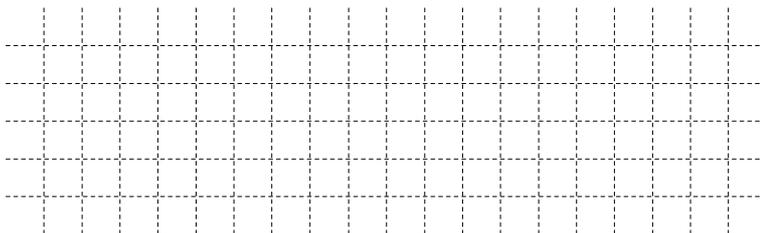
A 3.0 Gegeben sind Dreiecke PQ_nR mit den Seitenlängen $\overline{PQ_n} = 3 \text{ cm}$ und $\overline{PR} = 8 \text{ cm}$. Die Winkel $\angle Q_nPR$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 90^\circ[$.

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck PQ_1R für $\varphi = 30^\circ$.



A 3.1 Geben Sie die Länge der Strecken $[Q_nR]$ in Abhängigkeit von φ an.

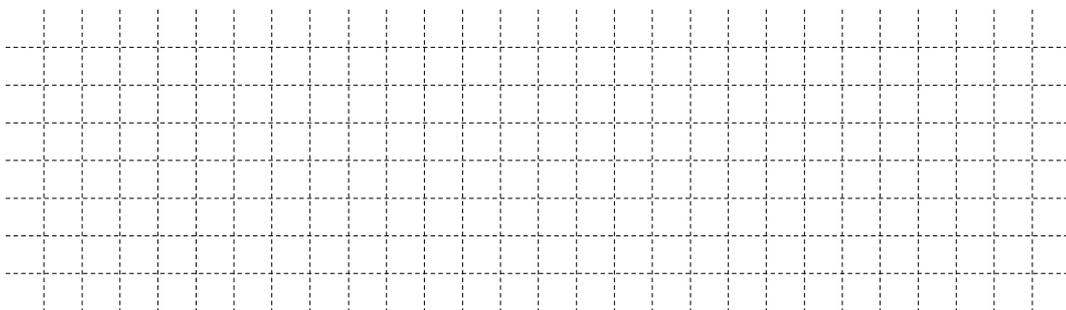
1 P



A 3.2 Die Dreiecke PQ_nR rotieren um die Gerade PR . Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Oberflächeninhalt O der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt:

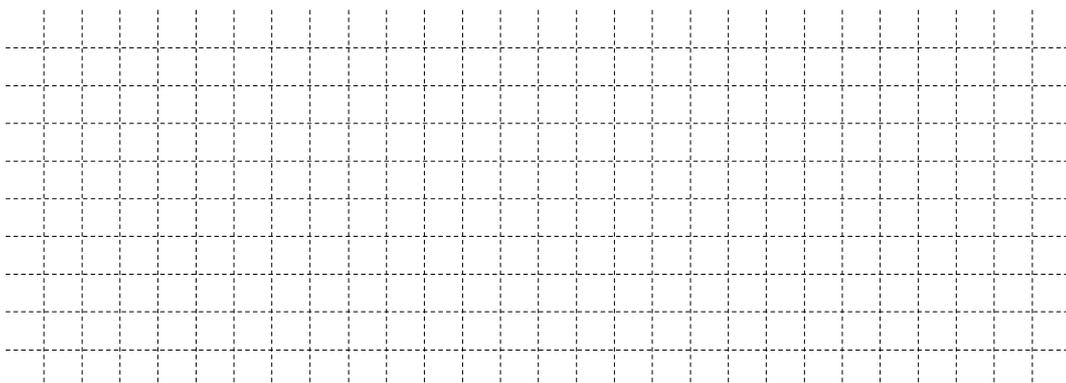
$$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin \varphi \cdot \left(3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos \varphi} \right) \text{ cm}^2.$$

2 P



A 3.3 Die entstehenden Rotationskörper setzen sich jeweils aus zwei Kegeln zusammen. Berechnen Sie, für welches Winkelmaß φ der Mantelflächeninhalt des Kegels mit der Spitze P einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt O des entstehenden Rotationskörpers hat.

2 P





Mathematik I

Aufgabe B 1

Haupttermin

- B 1.0 Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -\log_{0,5}(x+2) + 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- B 1.1 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_1 sowie die Gleichung der Asymptote h an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-1,5; 9]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leq x \leq 11$; $-5 \leq y \leq 8$. 3 P
- B 1.2 Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = 2$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 3$ hat ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). 3 P
- B 1.3 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_2 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein. 2 P
- B 1.4 Punkte $A_n(x | -2 \cdot \log_{0,5} x - 3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $D_n(x | -\log_{0,5}(x+2) + 2)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und C_n die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$. Es gilt: $\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Zeichnen Sie das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 1$ und das Parallelogramm $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von x es Parallelogramme $A_n B_n C_n D_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. 4 P
- B 1.5 Die Winkel $B_n A_n D_n$ haben stets das gleiche Maß.
Berechnen Sie das Maß der Winkel $B_n A_n D_n$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. 1 P
- B 1.6 Das Parallelogramm $A_3 B_3 C_3 D_3$ ist eine Raute.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_3 .
[Teilergebnis: $\overline{A_n D_n}(x) = \left[\log_{0,5} \left(\frac{x^2}{x+2} \right) + 5 \right] \text{LE}$] 4 P



Mathematik I

Aufgabe B 2

Haupttermin

B 2.0 Die Raute ABCD mit den Diagonalen [AC] und [BD] ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M der Raute ABCD liegt. Es gilt: $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 12 \text{ cm}$; $\sphericalangle CAS = 60^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCDS, wobei die Strecke [AC] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [MS].

[Ergebnis: $\overline{MS} = 8,66 \text{ cm}$]

3 P

B 2.2 Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide ABCDS schneiden die Kanten der Pyramide ABCDS in den Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$, $G_n \in [CS]$ und $H_n \in [DS]$, wobei die Winkel E_nMA das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 90^\circ[$ haben. Die Rauten $E_nF_nG_nH_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ mit der Spitze M.

Zeichnen Sie die Pyramide $E_1F_1G_1H_1M$ für $\varphi = 55^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

1 P

B 2.3 Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten $[E_nM]$ der Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ in Abhängigkeit von φ .

[Ergebnis: $\overline{E_nM}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$]

2 P

B 2.4 Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Diagonalen $[E_nG_n]$ der Rauten $E_nF_nG_nH_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$\overline{E_nG_n}(\varphi) = \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$.

3 P

B 2.5 Die Punkte E_n , F_n , G_n , H_n , M und S sind die Eckpunkte von Körpern, die sich jeweils aus zwei Pyramiden zusammensetzen.

Begründen Sie, dass sich das Volumen V dieser Körper wie folgt berechnen lässt:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rauten } E_nF_nG_nH_n} \cdot \overline{MS}$.

Berechnen Sie sodann das Volumen V dieser Körper in Abhängigkeit von φ .

[Ergebnis: $V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \right)^2 \text{ cm}^3$]

5 P

B 2.6 Für den Körper mit den Eckpunkten E_0 , F_0 , G_0 , H_0 , M und S gilt: $\overline{E_0M} = 4,33 \text{ cm}$.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens dieses Körpers am Volumen der Pyramide ABCDS.

3 P